Groupe 2ie

Année 2025-2026

CPGE (Deuxième Année)

Travaux Dirigés d'Algèbre N°1

THEME 1

ALGEBRE GENERALE

Exercice 1

Soit $F = \{H_i\}_{i \in I}$, une famille de sous-groupes d'un groupe multiplicatif G.

1) Montrer que $T = \bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G.
2) Quelle est l'intersection des sous-groupes $2Z$ et $3Z$ du groupe additif Z.

Exercice 2

Soit $(G, \times, e)$ un groupe. Soit $a \in G$ un élément d'ordre fini d.

Montrer que $\forall n \in Z, a^n = e \Leftrightarrow d | n$

Exercice 3

Le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ noté G_4 est-il cyclique ?

Exercice 4

On rappelle que l'ordre n d'un élément a d'un groupe $(G, \times, e)$ donné est l'ordre du sous-groupe engendré par a. C'est le plus petit entier n tel que $a^n = e$.

I/ Soit G_n le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments.

1) Montrer que l'ordre d'un cycle quelconque du groupe symétrique G_n est égal au cardinal de son support.
2) Supposons qu'une permutation p de G_n a été décomposée en un produit de r cycles à supports disjoints ($p = p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_r$).
   a) Montrer que $p^m = e$ si et seulement $p_i^m = e, \quad \forall 1 \le i \le r$
   b) $p_i^m = e$ si et seulement si l'ordre de p_i divise m. $\forall 1 \le i \le r$
   c) En déduire que l'ordre de p est le PPCM des ordres des cycles p_i.

II/ Soient p_1, p_2, p_3 des cycles du groupe symétrique G_7 avec

$p_1 = (1,3,5)$; $p_2 = (2,6,5,7)$; $p_3 = (5,4,7,3)$

On donne $s = p_1 \circ p_2 \circ p_3^{-1}$

1) Décomposer s en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.
2) Déterminer l'ordre et la signature de s.
3) Calculer s^{538} et déterminer sa parité.

Exercice 5

On note σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 5 & 10 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Décomposer σ en des cycles à supports disjoints
2) Déterminer son ordre et sa signature.
3) Calculer σ^{2008}

Exercice 6

Soient $n \in N^*$ et $(a,b) \in Z^2$.

1) Montrer que si r_1 est le reste de la division euclidienne de a par n et r_2 est le reste de la division euclidienne de b par n alors le reste de la division euclidienne de $a+b$ par n est égal au reste de la division euclidienne de $r_1 + r_2$ par n et ab a pour reste de la division euclidienne par n, le reste de la division euclidienne de $r_1 r_2$ par n.
2) $\forall k \in N$, quels sont les restes de la division euclidienne de 10^k par 9 ?

Exercice 7

Soit $n \in N$.

1) Montrer que n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres (quand on l'écrit en base 10) est divisible par 3.
2) Montrer que n est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par les trois derniers chiffres de n est divisible par 8.

Exercice 8

Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^{7^7} ?

Exercice 9

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de l'entier $19^{52} \times 23^{41}$ par 7.
2) Déterminer suivant les valeurs de l'entier n, le reste de la division euclidienne par 7 de l'entier $N = 851^{3n} + 851^{2n} + 851 + 2$
3) Montrer que $\forall n \in N$, l'entier $N = 2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1$ est divisible par 9.

Exercice 10 (Petit théorème de Fermat)

Soit p un nombre premier.

1) Montrer que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise C_p^k.
2) Déduire que, pour tout $(a,b) \in Z^2, (a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.
3) Montrer par récurrence que, pour tout $a \in Z, a^p \equiv a \pmod p$ et que si p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Exercice 11

1) Résoudre dans $Z/13Z$, l'équation $n^8 + 2n^6 + 3n^4 + 2n^2 + 1 = 0$.

   On remarquera que $n^8 + 2n^6 + 3n^4 + 2n^2 + 1 = \left(n^4 + n^2 + 1\right)^2$.

2) Résoudre dans $Z/143Z$, l'équation $n^2 - 4n + 3 = 0$.

   On pourra utiliser le théorème chinois

Exercice 12

Montrer que $\forall (a,b) \in Z^2$, 13 divise $7a+3b$ si et seulement si 13 divise $5a+4b$.

Exercice 13

1) Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 < a < b$.
   Montrer que $(a+b)\wedge(a\vee b) = a\wedge b$
2) Trouver les entiers a et b tels que $\begin{cases} a+b=144 \\ a\vee b = 420 \end{cases}$

Exercice 14

Résoudre dans Z les systèmes de congruences suivants :

$$(S) \quad \begin{cases} 5x \equiv 7\,[11] \\ 7x \equiv 11\,[5] \\ 11x \equiv 5\,[7] \end{cases} \qquad\qquad (S') \quad \begin{cases} x \equiv 1\,[6] \\ x \equiv 3\,[10] \\ x \equiv 7\,[15] \end{cases}$$

Exercice 15 (Nombres de Mersenne)

1) Montrer que si a, p, q sont des entiers naturels, $a^{pq}-1$ est divisible par a^p-1 et a^q-1
2) Soit $n \in N$ avec $n \geq 2$. Montrer que si l'ensemble 2^n-1 est premier alors n est premier.

Exercice 16

Soit K un corps et $A == K \times K$

1) Montrer que les seuls idéaux du corps K sont $I = \{0\}$ et $I = K$.
2) Montrer que l'ensemble A a une structure d'anneau.
3) L'anneau A est-il un corps ?
4) Déterminer les idéaux de A.

Exercice 17

Soit I un idéal d'un anneau commutatif A. On appelle radical de I, l'ensemble noté $\sqrt{I}$ et défini par $\sqrt{I} = \{x \in A \,/\, \exists n \in N^*, x^n \in I\}$

1) Montrer que le radical d'un idéal est un idéal.
2) Montrer que le radical d'un idéal nZ de Z est $\sqrt{nZ} = (\prod_{i=1}^{r} p_i)Z$ où les p_i sont des nombres premiers de la décomposition de l'entier naturel n.

Exercice 18

1) Déterminer le groupe des inversibles de l'anneau $Z/9Z$ et trouver un groupe qui lui est isomorphe.
2) Les groupes multiplicatifs $U(Z/9Z)$ et $U(Z/7Z)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 19

1) Le groupe $U(Z/20Z)$ est-il cyclique ?
2) Donner un groupe isomorphe à $Z/20Z$.

THEME 2

ALGEBRE LINEAIRE

Exercice 1 (Somme et intersection de sous-espaces vectoriels)

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
1) Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
2) On suppose que $G \subset H$. Montrer que $(F + G) \cap H = (F \cap H) + G$.
3) On suppose que $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Montrer que $G = H$.

Exercice 2 (Bases d'un espace vectoriel)
Soit $\{P_k\}_{0 \le k \le n}$ une suite de polynômes de l'espace vectoriel des polynômes $R_n[X]$ telle que $d^\circ(P_k) = k$.
1) Montrer que, $\forall n \in N$, la famille $\{P_k\}_{0 \le k \le n}$ est une base de $R_n[X]$.
2) Soit $a, b \in R$ tels que $a \neq b$, montrer que la famille $B = \left\{(X-a)^k\right\}_{0 \le k \le 2n}$ est une base de $R_{2n}[X]$ et déterminer les coordonnées du polynôme $P = (X-a)^n (X-b)^n$ dans la base B.
Indication : On écrira $X - b = X - a + (a - b)$ et on utilisera la formule du binôme de Newton.

Exercice 3 (Sous-espace vectoriel)

Soit $n \in N$ et $n \ge 2$ et soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\le n$, noté $R_n[X]$. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = P'(1) = 0$.

1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
2) Montrer que $P \in H$ si et seulement si $(X-1)^2$ divise P.
3) Donner une base de H et déterminer sa dimension.

Exercice 4 (Ensembles isomorphes)

Montrer que tout supplémentaire du noyau d'une application linéaire f est isomorphe à $Im(f)$.
En déduire la preuve du théorème du rang.

Exercice 5 (Noyau, image d'une application linéaire)

Soit E un espace vectoriel sur K et $f \in L(E)$.
1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) + Ker(f) = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ $\quad (f^2 = f \circ f)$
2) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$.

Exercice 6 (Rang d'applications linéaires)

Soient f et g deux éléments de $L(E, F)$.
1) Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
2) Montrer que $rg(-f) = rg(f)$
3) Déduire que $|rg(f) - rg(g)| \le rg(f+g) \le rg(f) + rg(g)$.
4) On suppose que $f, g \in L(E)$, $f + g$ est bijectif et que $f \circ g = 0$.

a) Montrer que $rg(f)+rg(g)=\dim E$

b) En déduire que $\operatorname{Im} g = Ker\, f$.

Exercice 7 (Rang de la composée d'applications linéaires)

Soient $f\in L(E,F)$ et $g\in L(F,G)$.

1) Montrer que $rg(f)+rg(g)-\dim F\le rg(g\circ f)\le \min\{rg(f),rg(g)\}$

2) Si u et v sont des automorphismes, montrer que $rg(u\circ f\circ v)=rg(f)$.

Exercice 8 (Somme d'espaces vectoriels)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $f\in L(E,F)$.

Soient A et B deux sous espaces vectoriels de E .

Montrer que $f(A)\subset f(B)\Leftrightarrow A+Ker(f)\subset B+Ker(f)$.

Exercice 9 (Somme directe de sous-espaces vectoriels)

Soit E un $K-$espace vectoriel. Soient E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre sous-espaces vectoriels tels que $(E_1+E_2)+(E_3+E_4)=(E_1+E_2)\oplus(E_3+E_4)$ et $(E_1+E_3)+(E_2+E_4)=(E_1+E_3)\oplus(E_2+E_4)$.

Montrer que la somme $E_1+E_2+E_3+E_4$ est directe.

Exercice 10 (Sous espaces vectoriels supplémentaires)

On considère l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions réelles d'une variable réelle.

Montrer que $F=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(1)=0\right\}$ et $G=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists a\in\mathbb{R}, f(x)=ax\right\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 11 (Endomorphisme nilpotent)

Soit E un $K-$espace vectoriel et $f\in L(E)$.

1) Montrer que si f est nilpotent d'indice de nilpotence $p\ge 1$ alors l'application

   $Id_E - f$ est bijective et a pour réciproque l'application $(Id_E-f)^{-1}=\sum_{i=0}^{p-1} f^i$.

2) On suppose que $E=R_n[X]$ et que $f\in L(E)$ est défini par $\forall P\in E, f(P)=P-P'$

   Montrer que f est inversible et calculer son inverse.

   Indication : On montrera que l'application $g\in L(E)$ définie par $\forall P\in E, g(P)=P'$ est nilpotente et on observera que $f=Id_E-g$.

Exercice 12 (Rang et noyau d'une application linéaire)

On rappelle que l'ensemble E des polynômes à coefficients réels noté $R[X]$ est un espace vectoriel sur R .

1) Montrer que l'ensemble F des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à l'ensemble n noté $R_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $R[X]$.

2) Montrer que la famille $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ est une base de $R_n[X]$.

3) On suppose que $n = 4$ et on considère l'application ϕ qui a tout polynôme $P \in R_4[X]$ associe le polynôme Q défini par :
$\forall x \in R,\ q(x) = p(x+1) + p(x-1) - 2p(x)$.

a) L'application ϕ est-elle un endomorphisme de $R_4[X]$?

b) Calculer $\phi(1), \phi(X), \phi(X^2), \phi(X^3), \phi(X^4)$ et déduire le rang de ϕ et la dimension du noyau de ϕ.

c) On donne $q(x) = x^2 + 2x + 3$. Calculer $P \in R_4[X]$ tel que $\phi(P) = Q$ avec $p(0) = p'(0) = 0$.

Exercice 13 (Puissance d'une matrice par récurrence)

1) $\forall n \in N^*$, soit $A \in M_n(K)$ la matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Déterminer $A^m, \forall m \in N$.

2) Soit $B = (b_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice carrée telle que $b_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $b_{ii} = 0$.
Calculer $B^m,\ \forall m \in N^*$

Indication : On pourra utiliser la partie 1)

Exercice 14 (Matrice d'une application linéaire)

Soient $A = X^4 + 1$ et $B = X^4 + X$ deux polynômes et soit f l'application qui à $P \in R_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1) Montrer que l'application f est linéaire.
2) Donner la matrice de f dans la base canonique de $R_3[X]$
3) Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 15 (Matrice d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel sur R de dimension 3. Soit $f \in L(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 (Matrices semblables)

1) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2) Soient $B \in GL_n(K)$ et $A \in M_n(K)$ montrer que BA et AB sont semblables.

Exercice 17 (Trace d'un endomorphisme)

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension finie.
Déterminer la trace des endomorphismes suivants

1) Une homothétie h de rapport α .
2) Un projecteur p
3) Une symétrie s

Exercice 18 (Rang d'une Matrice-blocs)

Soient $A \in M_{pn}(R),\ B \in M_{mq}(R),\ C \in M_{pq}(R)$. On note r le rang de A er s le rang de B .

1) Montrer que le rang de la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est égal à $rg(A) + rg(B)$
2) On suppose que A est carrée et inversible, montrer que le rang de la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est égal à $rg(A) + rg(B)$

Exercice 19 Factoriser les déterminants suivants où a,b et c sont trois scalaires donnés.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 20 Soient a,b,c,d quatre nombres complexes donnés.

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{pmatrix}$

Indication : Décomposer la matrice A en blocs c'est-à-dire $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}$ où $A_1 = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ puis, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A, se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Exercice 21 Soit $A \in M_n(R)$ telle que ${}^tA = -A$.

1) Montrer que si n est impair, la matrice A est non inversible.
2) A l'aide de deux exemples, montrer que pour n pair et supérieur ou égal à 4, on ne peut rien conclure à priori.

Exercice 22

On munit l'espace vectoriel $E = M_n(R)$ de sa base canonique
$B = \{E_{11}, E_{21}, \cdots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \cdots, E_{n2}, \cdots, E_{1n}, E_{2n}, \cdots, E_{nn}\}$. Soit $A \in E$.
Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f de E défini par $\forall M \in E, \quad f(M) = AM$. On remarquera que $E_{ij}E_{lk} = E_{ik}$ si $j = l$ et $E_{ij}E_{lk} = 0$ si $j \neq l$.

Exercice 23 Soient $A, B, C \in M_n(K)$ et $D \in GL_n(K)$ telles que $CD = DC$

Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Indication : Utiliser le produit par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$ et conclure.

Exercice 24 (Déterminant de Vandermonde)

On se propose de calculer le déterminant d'ordre n suivant

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des éléments du corps K.

1) Calculer W_2 et W_3. Peut-on faire une conjecture concernant W_n ?
2) On considère le polynôme $p(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{n-1})$. Montrer qu'il existe des coefficients $b_1, b_2, \cdots, b_{n-2} \in K$ tels que $p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-2}x^{n-2} + x^{n-1}$.

Soients $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$ les lignes de W_n. Quel déterminant obtient-on en ajoutant à la ligne L_{n-1} la combinaison $b_{n-2}L_{n-2} + \cdots + b_0 L_0$. Déduire une relation de récurrence entre W_n et W_{n-1}.

3) Calculer W_n.

Exercice 25

1) Calculer le déterminant de la matrice réelle A d'ordre n dont les éléments diagonaux valent a et tous les autres b.
2) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit inversible et calculer A^{-1}.

Indication : Pour le calcul du déterminant de A, ajouter à la première colonne les $(n-1)$ dernières. Pour le calcul de l'inverse, résoudre un système d'équations linéaires.

Exercice 26

Soient a,b deux scalaires et soient $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ la matrice carrée définie par :

$$a_{ij}=\begin{cases} b & \text{si } j>i \\ a & \text{si } j\leq i \end{cases}$$

Calculer $\det(A)$.

Exercice 27 On considère le déterminant

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

1) Montrer que $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$
2) Calculer D_n

Exercice 28

Montrer, sans le calculer, que le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 9 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$ est divisible par 13.

Exercice 29

Soit $A\in M_n(K)$ et $A^*={}^tCom(A)$, la transposée de la comatrice de A.

1) Montrer que $A^*A=\det(A)I_n$
2) Déduire que la matrice A est inversible si et seulement si $\det(A)\neq 0$.